年　月　日

科　目　名	学　年	学 科 名	学 籍 番 号	氏　　名
物理学 I	年			

[1]　鉛直上向きに y 軸を、水平に x 軸をとり、原点Oから初速度ベクトル V_0 で質点を水平面との角度 θ で投げ出した場合を考える. (1) 重力加速度を g として運動方程式を立て，質点の座標（x,y）を表す式を導け.

また．その結果をもとに，(2) 質点の最高到達点の高さと h を求めよ，さらに(3) x が最大となるときの角度 θ を求めよ.

(1) 運動方程式（初期条件 t=0 において x=0,y=0,v_x=$V_o\cos\theta$,　v_y= $V_o\cos\theta$,）

$m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-mg,\quad m\dfrac{d^2y}{dt^2}=-mg$ より，m を消去して

$v_x=\dfrac{dx}{dt}=C_1,\qquad v_y=\dfrac{dy}{dt}=-gt+C_2,$

$x=C_1t+C_3,\qquad y=-\dfrac{1}{2}gt^2+C_2t+C_4$

初期条件 $x=y=0\quad at\quad t=0$ より　$C_3=0,\qquad C_4=0,$

また，$v_x=V_o\cos\theta,\quad v_y=V_o\sin\theta\quad at\quad t=0$ より $C_3=V_o\cos\theta,\quad C_4=V_o\sin\theta$

したがって，$x=-\dfrac{1}{2}gt^2+V_ot\cos\theta,\quad y=-\dfrac{1}{2}gt^2+V_o\sin\theta t$

(2) 最高到達点 h　（ヒント：最大到達点では v_y=0）

最高到達点に達する時間を T とすると，そのときの速度 v_y=0 より

$v_y=-gT+V_o\sin\theta=0$ ゆえに $T=\dfrac{V_o}{g}\sin\theta$

ゆえに，$h=-\dfrac{1}{2}gt^2+V_o\sin\theta t=-\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{V_o}{g}\sin\theta\right)^2+V_o\sin\theta\left(\dfrac{V_o}{g}\sin\theta\right)=\dfrac{V_o^{\,2}}{2g}\sin^2\theta$

(3) x が最大となるときの角度 θ (**ヒント：最大到達点では** y=**0**)

x の最大値を L とし，そのときの t を T とする．また，そのとき $y=0$ であるから，y の式に上記の条件を代入して式を整理すると

$$L\left(L-\frac{2V_0^{\,2}}{g}\sin\theta\cos\theta\right)=0$$

$$\therefore L=0,\quad L=\frac{2V_0^{\,2}}{g}\sin\theta\cos\theta=\frac{V_0^{\,2}}{g}\sin 2\theta$$

したがって，θ=45 の時に x は最大となる.

[3] $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}x$ …①の解が $x = C\sin(\omega t + \phi)$ となることを以下の手順にしたがって証明せよ．ただし，$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}, C = \sqrt{A^2 + B^2}, \phi = \tan\dfrac{A}{B}$，$A$，$B$ は任意定数とする．

解答:

式①の解を $x = \mathrm{e}^{pt}$ と仮定すると、

$$\frac{dx}{dt} = \boxed{p\mathrm{e}^{pt}}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \boxed{p^2\mathrm{e}^{pt}}$$

であるから，上式を与式に代入すると、

$$p^2\mathrm{e}^{pt} = -\omega^2\mathrm{e}^{pt}$$

$$\boxed{p^2 = -\omega^2}$$

$$\therefore p = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm\mathrm{i}\omega \quad (\mathrm{i}:\text{虚数})$$

よって、解は、

$$x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \boxed{\cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t} = f_1(x)$$

$$x = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \boxed{\cos\omega t - \mathrm{i}\sin\omega t} = f_2(x)$$

となる．このとき，A_1, A_2 を適当な定数とすると、

$$x = A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)$$

も式①の解である。したがって，

$$x = A_1(\cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t) + A_2(\cos\omega t - \mathrm{i}\sin\omega t)$$

$$x = (A_1 + A_2)\cos\omega t + (A_1 - A_2)\mathrm{i}\sin\omega t \quad \cdots ②$$

が解として得られる．数学的には A_1, A_2 はどんな複素数でもよいが、物理学の問題（振り子やばねの問題）としては，ばねの伸び縮みに対応する x は実数でなければならないことから、

$A_1 + A_2$ が実数

$A_1 - A_2$ が純虚数

でなければならない。従って、

$$A_1 = A_2^*$$

従って、A, B を適当な実数として、与式一般解

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \quad ③$$

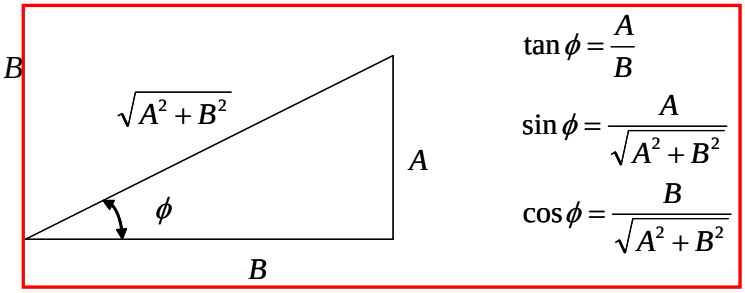
が得られる．

ここで $\tan\phi = A/B$ とおくと，$\sin\phi = \boxed{A/\sqrt{A^2+B^2}}, \cos\phi = \boxed{B/\sqrt{A^2+B^2}}$ であるから，

$$x = C\sin(\omega t + \phi)$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan\phi = A/B$$

となる．



One Point **指数関数の微分**

$(e^x)' = e^x$

One Point **虚数**

$i = \sqrt{-1}(i^2 = -1)$ となる i を虚数単位という。

One Point **オイラーの公式**

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$

$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$

One Point **共役複素数**

複素数 $\alpha = a + bi$ に対して

$$\alpha^* = a - bi$$

を α の共役複素数という。