第 5 回　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　年　月　日

科　目　名	学　年	学 科 名	学 籍 番 号	氏　　　名
物理学 I	年			

[1]　鉛直上向きに y 軸を、水平に x 軸をとり、原点Oから初速度ベクトル V_0 で質点を水平面との角度 θ で投げ出した場合を考える．空気抵抗は速度に比例($f_x=-kv_x$, $f_y=-kv_y$)とする．重力加速度を g として運動方程式を立て，質点の座標（x,y）及び速度 (v_x, v_y)を表す式を導け．

[2] $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}x$ **…①の解が** $x = C\sin(\omega t + \phi)$ **となることを以下の手順にしたがって証明せよ．ただし，** $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}, C = \sqrt{A^2+B^2}, \phi = \tan\dfrac{A}{B}$ **，*A, B* は任意定数とする．**

解答：

式①の解を $x = \mathrm{e}^{pt}$ と仮定すると、

> ***One Point*　指数関数の微分**
> $(e^x)' = e^x$

$$\frac{dx}{dt} = \boxed{} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \boxed{}$$

であるから，上式を与式に代入すると、

$$p^2\mathrm{e}^{pt} = -\omega^2\mathrm{e}^{pt}$$

$$\boxed{}$$

> ***One Point*　虚数**
> $i = \sqrt{-1}(i^2 = -1)$ となる i を虚数単位という。

$$\therefore\ p = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm\mathrm{i}\omega \quad (\mathrm{i}: 虚数)$$

よって、解は、

> ***One Point*　オイラーの公式**
> $e^{ix} = \cos x + i\sin x$
> $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$

$$x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \boxed{} = f_1(x)$$

$$x = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \boxed{} = f_2(x)$$

となる．このとき，A_1, A_2 を適当な定数とすると、

$$x = A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)$$

も式①の解である。したがって,

$$x = A_1(\cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t) + A_2(\cos\omega t - \mathrm{i}\sin\omega t)$$

$$x = (A_1 + A_2)\cos\omega t + (A_1 - A_2)\mathrm{i}\sin\omega t \quad . . ②$$

が解として得られる．数学的には A_1, A_2 はどんな複素数でもよいが、物理学の問題（振り子やばねの問題）としては，ばねの伸び縮みに対応する x は実数でなければならないことから、

$A_1 + A_2$ が実数

$A_1 - A_2$ が純虚数

> ***One Point*　共役複素数**
> 複素数 $\alpha = a + bi$ に対して
> $\alpha^* = a - bi$
> をαの共役複素数という。

でなければならない。従って、

$$A_1 = A_2^*$$

従って、A, B を適当な実数として、与式一般解

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad ③$$

が得られる．

ここで $\tan\phi = A/B$ とおくと，$\sin\phi = \boxed{}$, $\cos\phi = \boxed{}$ であるから,

$$x = C\sin(\omega t + \phi)$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2},\quad \tan\phi = A/B$$

となる．